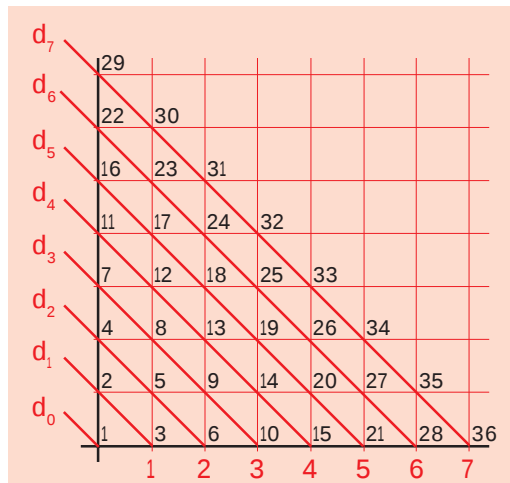


UN JEU MATHÉMATIQUE

Solution niveau Seconde



Problème

On numérote les nœuds du quadrillage:

- dans l'ordre,
- à partir de 1,
- en suivant les diagonales, comme indiqué sur le dessin ci-contre.

- 1- Quelles sont les coordonnées du point numéroté **1998** ?
- 2- D'une façon générale, quelles sont les coordonnées d'un point numéroté **n** ?
- 3- Réciproquement, le point M ayant les coordonnées entières x et y , quel est son numéro ?

Principe

La solution proposée utilise un raisonnement itératif qui amène au calcul des termes d'une suite (sans citer le nom). Pour de grands nombres, les calculs à la main sont très pénibles.

La méthode est basée sur les remarques suivantes:

Détermination directe:

Si n est le numéro du point N cherché, on détermine:

- la diagonale d_i à laquelle appartient le point N ,
- le plus petit numéro a , associé au point $A(0, i)$,
- l'écart $e = n - a$,
- les coordonnées de N , qui sont alors $(e, -e+i)$

Relation entre les ordonnées i et les numéros des points A .

i	0	1	2	3	4	5	6	...
a	1	$\rightarrow 2$	$\rightarrow 4$	$\rightarrow 7$	$\rightarrow 11$	$\rightarrow 16$	$\rightarrow 22$	...

Voir programme au dos.



NUMERO: ?
15

---LE POINT NUMERO---
15
A POUR COORDONNEES:
4 0

NUMERO: ?
1998

---LE POINT NUMERO---
1998
A POUR COORDONNEES:
44 18

Détermination réciproque:

Si x et y sont les coordonnées du point N , on détermine:

- la diagonale d_i à laquelle appartient le point N ($i = x+y$),
- le plus petit numéro a associé à la diagonale d_i ,
- le numéro de N , qui est alors $a+x$.

Voir programme au dos.



ABS X=?
7
ORD Y=?
32

ABS X=?
44
ORD Y=?
18

POINT DE COORDONNEES:
7 32
A POUR NUMERO
788

POINT DE COORDONNEES:
44 18
A POUR NUMERO
1998



UN JEU MATHÉMATIQUE

Solution niveau Seconde

Indications

- On peut nommer le premier programme (direct): **JMATH D2**.
- On peut nommer le second programme (réciproque): **JMATH R2**.

Programme

- Demander n , le numéro du point cherché.
- On donne: $i = 0$ et $a = 1$.

• Tant que $a < n$, faire:

- augmenter i de 1,
- augmenter a de i .

Fin de Tant que.

- Diminuer a de i .
- Diminuer i de 1.
- Calculer l'écart $e = n - a$ (abscisse de N).
- Calculer $y = -e + i$ (ordonnée de N).

a est plus grand que n; il faut revenir aux valeurs précédentes.

- Afficher les coordonnées.

```

ClrText↓
"NUMERO:"?→N↓
0→I:1→A↓
While A<N↓
I+1→I↓
A+I→A↓
WhileEnd↓
A-I→A↓
I-1→I↓
N-A→E↓
-E+I→Y↓
ClrText↓
Locate 1,1,"---LE POI
NT NUMERO---"↓
Locate 9,3,N↓
Locate 1,5," A POUR C
OORDONNEES: "↓
Locate 5,7,E↓
Locate 15,7,Y
  
```

- Demander l'absc. x et l'ordon. y du point cherché.
- On donne: $i = x + y$ et $a = 1$.

• Répéter i fois (à partir de $d=0$):

- augmenter d de 1,
- augmenter a de d .

Fin de répéter.

- Calculer $n = a + x$ (numéro de N).
- Afficher le numéro.

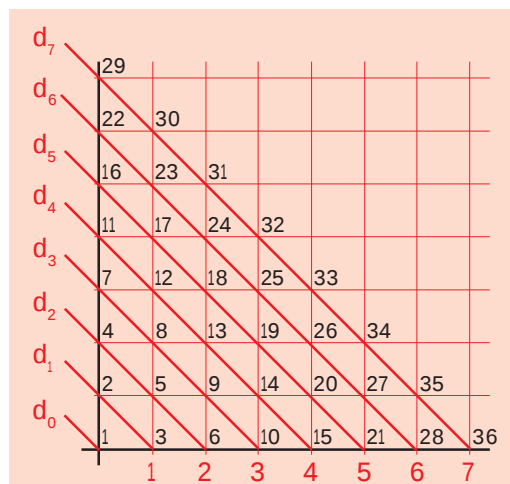
```

ClrText↓
"ABS X="?→X↓
"ORD Y="?→Y↓
X+Y→I↓
1→A↓
For 0→D To I↓
A+D→A↓
Next↓
A+X→N↓
ClrText↓
Locate 1,1,"POINT DE
COORDONNEES:"↓
Locate 5,3,X↓
Locate 15,3,Y↓
Locate 1,5," A POU
R NUMERO "↓
Locate 9,7,N
  
```



UN JEU MATHÉMATIQUE

Solution niveau Terminale



Problème

On numérote les nœuds du quadrillage:

- dans l'ordre,
- à partir de 1,
- en suivant les diagonales, comme indiqué sur le dessin ci-contre.

- 1- Quelles sont les coordonnées du point numéroté **1998** ?
- 2- D'une façon générale, quelles sont les coordonnées d'un point numéroté ***n*** ?
- 3- Réciproquement, le point M ayant les coordonnées entières ***x*** et ***y***, quel est son numéro ?

Principe

La solution proposée, de niveau terminale (et première), fait intervenir les notions suivantes:

somme des termes d'une suite arithmétique une fonction f , définie, continue et strictement croissante sur un intervalle $[a,b]$ définit une bijection de $[a,b]$ sur $[f(a),f(b)]$ racines du trinôme.

Les calculs sont facilement réalisables à la main.

La méthode est basée sur les considérations suivantes:

• Si x et y sont les coordonnées d'un point numéroté ***n***, alors le point suivant, numéroté ***n+1***, sur la même diagonale, a pour coordonnées ***x+1*** et ***y-1***.

• Sur la diagonale ***d_i***, d'équation **$y = -x + i$** , le point **A** de coordonnées **(0, *i*)** possède le numéro ***a*** (plus petit numéro des points de la diagonale).

Sur <i>d₀</i>	il y a	1	point du quadrillage
Sur <i>d₁</i>	il y a	2	point du quadrillage
Sur <i>d₂</i>	il y a	3	point du quadrillage
...	...	...	...
Sur <i>d_{i-1}</i>	il y a	<i>i</i>	point du quadrillage

Le nombre total de points sur les diagonales

est **$d_0, d_1, d_2, \dots, d_{i-1}$**
 $1 + 2 + 3 + \dots + i$

soit **$\frac{i(i+1)}{2}$**

Ce nombre correspond au plus grand numéro des points de la diagonale ***d_{i-1}***.

Sur ***d_i*** on trouve donc les points numérotés:

$\frac{i(i+1)}{2} + 1$	d'abscisse	0	d'ordonnée	<i>i</i>
$\frac{i(i+1)}{2} + 2$	d'abscisse	1	d'ordonnée	<i>i-1</i>
...	...	...	...	...
$\frac{i(i+1)}{2} + j$	d'abscisse	<i>j-1</i>	d'ordonnée	<i>i-j+1</i>
...	...	...	...	...
$\frac{i(i+1)}{2} + i+1$	d'abscisse	<i>i</i>	d'ordonnée	0

De ceci l'on tire que:

le point **(*i*, 0)** a pour numéro **$\frac{(i+1)(i+2)}{2}$**

l'abscisse du point **N** numéroté ***n***, sur la diagonale ***d_i***, est:

$$x = n - \frac{i(i+1)}{2} - 1$$

La fonction définie par **$f(x) = \frac{x(x+1)}{2}$** étant continue et strictement croissante sur **$[i; i+1]$** ,

Voir suite au dos.

UN JEU MATHÉMATIQUE

Solution niveau Terminale

elle prend toute valeur comprise entre

$$\left] \frac{i(i+1)}{2} ; \frac{(i+1)(i+2)}{2} \right]$$

et, singulièrement, toutes les valeurs entières

$$\frac{i(i+1)}{2} + 1 ; \frac{i(i+1)}{2} + 2 ; \dots$$

obtenues pour des valeurs de x de la forme $x=i+\alpha$ où $0 < \alpha < 1$, sauf pour $n = \frac{(i+1)(i+2)}{2}$ qui correspond à $i+1$.

Donc :

- si x est entier alors $i = x - 1$
- sinon $i = E(x)$ (partie entière de x)

Conclusion: n étant donné, on cherche la racine positive r de :

$$\frac{x(x+1)}{2} - n = 0$$

• si r est entier alors n est le plus grand numéro de la diagonale d_{r-1} et $i = r - 1$. Les coordonnées sont $(i, 0)$.

• sinon $i = E(r)$. Les coordonnées du point sont alors :

$$x = n - \frac{i(i+1)}{2} - 1 \quad \text{et} \quad y = -x + i$$

Réciproquement

Soit $N(x_0, y_0)$ un point du quadrillage (x_0 et y_0 entiers positifs). Ce point appartient à la diagonale d_i , où i est solution de l'équation $y_0 = -x_0 + i$.

Soit : $i = x_0 + y_0$.

$$a = \frac{i(i+1)}{2} + 1 = \frac{(x_0 + y_0)(x_0 + y_0 + 1)}{2} + 1$$

est le plus petit numéro des points de la diagonale d_i . Il est associé au point $A(0, i)$. On passe de A à N en progressant de x_0 points.

Donc le numéro de N est $n = a + x_0$.

Indications

- On peut nommer le premier programme (direct): **JMATH DT.**
- On peut nommer le second programme (réciproque): **JMATH RT.**



Programme



```

○ ClrText↓
○ "NUMERO:"?→N↓
○ Int((-1+√(1+8N))÷2)→
○ R↓
○ If R²+R-2N=0↓
○ Then R-1→X:0→Y↓
○ Else R(R+1)÷2+1→A↓
○ N-A→X:R-X→Y↓
○ IfEnd↓
○ ClrText↓
○ Locate 1,1,"---LE POI
○ NT NUMERO---"↓
○ Locate 9,3,N↓
○ Locate 1,5," A POUR C
○ OORDONNEES: "↓
○ Locate 5,7,X↓
○ Locate 15,7,Y
    
```



Programme



```

○ ClrText↓
○ "ABS X="?→X↓
○ "ORD Y="?→Y↓
○ (X+Y)(X+Y+1)÷2+1→A↓
○ A+X→N↓
○ ClrText↓
○ Locate 1,1,"POINT DE
○ COORDONNEES:"↓
○ Locate 5,3,X↓
○ Locate 15,3,Y↓
○ Locate 1,5," A POUR
○ R NUMERO "↓
○ Locate 9,7,N
    
```

Utilisation

Mêmes pages écran que pour le niveau seconde (fiche précédente).

